Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 8 im Wintersemester 2021 (am 10.12.21):
Der Etal-Raum einer Prägarbe, assoziierte Garben

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
WS 20.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020.
SS 21.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021.
y.z	verweist auf Aussage y.z des aktuellen Abschnitts der aktuellen Vorlesung

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

5c Die Strukturgarbe einer algebraischen Menge

5b.1 Garben

5b.1.4 Der Etal-Raum einer Prägarbe

Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen sind und

$$F: \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

eine Prägarbe mit Werten in $\mathcal{C}$. Wir betrachten die disjunkte Vereinigung der Halme von F, sagen wir

$$X_F := \vee_{x\in X} F_x ,$$

und die Abbildung

$$\pi: X_F \longrightarrow X,$$

welche die Elemente von F_x in den Punkt x abbildet,

$$\pi(F_x) = \{x\}.$$

Für jede offene Menge U von X und jeden Schnitt $s \in F(U)$ bezeichnen wir mit $\tilde{s}$ die Abbildung

$$\tilde{s}: U \longrightarrow X_F,\ x \mapsto [s]_x,$$

die jeden Punkt x von U in den Schnitt von s in x abbildet. Dann ist die Zusammensetzuung

$$\pi\circ\tilde{s} = 1_U$$

gerade die identische Abbildung von U. Wir versehen die Menge X_F mit der stärksten Topologie, für welche die Abbildungen $\tilde{s}$ für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jeden Schnitt $s \in F(U)$ stetig sind, d.h. eine Teilmenge

$$W \subseteq X_F$$

ist genau dann offen in X_F, wenn alle Mengen der Gestalt

$$\tilde{s}^{-1}(W)$$

offen sind in X.[1] Der topologische Raum X_F zusammen mit der Abbildung

$$\pi: X_F \longrightarrow X$$

heißt dann <u>Etal-Raum</u> von F.

5b.1.5 Eigenschafen des Etal-Raums

Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{C}$ eine Kategorie, deren Objekte Mengen sind und

$$F: \mathrm{Top}(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

eine Prägarbe mit Werten in $\mathcal{C}$. Dann gelten mit den Bezeichnungen von 5b.1.3 die folgenden Aussagen.

(i) Die Abbildung $\pi: X_F \longrightarrow X$ von 5b.1.4 ist stetig.

(ii) Die Mengen der Gestalt

$$\tilde{s}(U)$$

mit U offene Teilmenge von X und $s \in F(U)$ sind offen und bilden eine Topologie-Basis von X_F. Insbesondere ist jede der stetigen Abbildungen

$$\tilde{s}: U \longrightarrow X_F$$

mit U offen in X und $s \in F(U)$ offen.

(iii) Die Abbildung $\pi: X_F \longrightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus.

(iv) Seien U eine offene Teilmenge von X,

$$s \in \Gamma_\pi(U)$$

ein Schnitt der Garbe Γ_π der stetigen Schnitt von π über U und $x \in U$ ein Punkt. Dann gibt es eine offene Menge U_x von X und einen Schnitt

$$s_x \in F(U_x)$$

mit $x \in U_x \subseteq U$ und

$$s|_{U_x} = (s_x)^{\sim}.$$

Mit anderen Worten, die Schnitte der Garbe Γ_π sind lokal von der Gestalt

$$\tilde{s}: U_x \longrightarrow X_F,\ y \mapsto [s]_y$$

mit U_x und $s \in F(U_x)$.

---

[1] Aus der Beschreibung der offenen Mengen W ergibt sich direkt, daß auf diese Weise eine Topologie auf X_F definiert ist: $\tilde{s}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ist offen in X, $\tilde{s}^{-1}(X_F) = U$ ist offen in X. Für offene Mengen W', W" von X_F ist $\tilde{s}^{-1}(W' \cap W'') = \tilde{s}^{-1}(W') \cap \tilde{s}^{-1}(W'')$ offen in X. Für jede Familie $\{W_i\}_{i\in I}$ von offenen Mengen von X_F ist $\tilde{s}^{-1}(\bigcup_{i\in I} W_i) = \bigcup_{i\in I} \tilde{s}^{-1}(W_i)$ offen in X_F.

Beweis. Zu (i). Sei V eine offene Teilmenge von X. Wir haben zu zeigen $\pi^{-1}(V)$ ist offen in X_F. Dazu reicht es zu zeigen, die Menge

$$\tilde{s}^{-1}(\pi^{-1}(V)) = (\pi\circ\tilde{s})^{-1}(V)$$

ist offen in X für jedes Paar (s,U). Wegen $\pi\circ\tilde{s} = 1_U$, also $(\pi\circ\tilde{s})^{-1}(V) = U\cap V$ ist das aber trivialerweise der Fall.

Zu (ii). Beweis der Offenheit von $\tilde{s}(U)$.

Seien U' eine weitere offene Teilmenge von X und $s'\in F(U')$ ein weiterer Schnitt. Wir haben zu zeigen,

$$\tilde{s}'^{-1}(\tilde{s}(U))$$

ist offen in X. Für $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \in \tilde{s}'^{-1}(\tilde{s}(U)) &\Leftrightarrow \tilde{s}'(x) \in \tilde{s}(U) \\ &\Leftrightarrow [s']_x \in \tilde{s}(U) = \{[s]_y \mid y \in U\} \\ &\Leftrightarrow \text{Es gibt ein } y \in U \text{ mit } [s']_x = [s]_y \end{aligned}$$

Weil $\tilde{s}$ und $\tilde{s}'$ Schnitte von $\pi: X_F \longrightarrow X$ sind erhalten wir aus $[s']_x = [s]_y$ durch Anwenden von π, daß $x = y$ gilt. Es folgt

$$x \in \tilde{s}'^{-1}(\tilde{s}(U)) \quad \Leftrightarrow [s']_x = [s]_x.$$

Wenn zwei Schnitte in einem Punkt denselben Keim besitzen, so stimmen sie in einer ganzen Ümgebung dieses Punktes überein, haben also in dieser Umgebung denselben Keim. Insbesondere gilt

$$x \in \tilde{s}'^{-1}(\tilde{s}(U)) \quad \Rightarrow \text{es gibt eine offene Menge } W \text{ mit } x \in W\ \tilde{s}'^{-1}(\tilde{s}(U))$$

Mit anderen Worten, $\tilde{s}'^{-1}(\tilde{s}(U))$ ist offen.

Beweis der Offenheit der Abbildungen $\tilde{s}: U \longrightarrow X_F$.

Sei $U' \subseteq U$ eine offene Teilmenge. Wir haben zu zeigen, $\tilde{s}(U')$ ist offen X_F. Wegen

$$\begin{aligned} \tilde{s}(U') &= \{[s]_x \mid x \in U'\} \\ &= \{[s|_{U'}]_x \mid x \in U'\} \\ &= (s|_{U'})^{\sim}(U') \end{aligned}$$

ist das aber auf Grund der gerade bewiesenen Aussage der Fall.

Die Mengen $\tilde{s}(U)$ bilden eine Topologie-Basis von X_F.

Sei $W \subseteq X_F$ eine offene Teilmenge und $w \in W$ ein Punkt. Wir haben zu zeigen, es gibt eine offene Teilmenge U von X und einen Schnitt $s \in F(U)$ mit

$$w \in \tilde{s}(U) \subseteq W.$$

Wegen $w \in W \subseteq X_F$ ist w der Keim eines Schnittes von F, d.h. es gibt eine offene Teilmenge U von X und ein $s \in F(U)$ und einen Punkt $x \in U$ mit

$$w = [(s,U)]_x = \tilde{s}(x)$$

Weil $\tilde{s}: U \longrightarrow X_F$ stetig ist, ist $\tilde{s}^{-1}(W)$ offen in X und wegen $w = \tilde{s}(x)$ gilt

$$x \in \tilde{s}^{-1}(W),$$

d.h. $\tilde{s}^{-1}(W)$ ist eine offene Umgebung von x, die ganz im Definitionsbereich U von $\tilde{s}$ enthalten ist. Wenn wir U durch diese eventuell kleinere offene Umgebung ersetzen und s durch die Einschränkung auf diese kleinere offene Umgebung, so bleibt der Keim von s unverändert. Wir können also annehmen,

$$U = \tilde{s}^{-1}(W).$$

Dann gilt aber,

$$\tilde{s}(U) \subseteq W$$

(und trivialerweise $w = \tilde{s}(x) \in \tilde{s}(U)$).

<u>Zu (iii)</u>. Sei $w \in X_F$ ein vorgegebener Punkt. Wir haben zu zeigen, es gibt eine offene Umgebung W von w mit der Eigenschaft, daß $\pi(W)$ offen in X und die Einschränkung

$$\pi|_W: W \longrightarrow \pi(W)$$

ein Homöomorphismus ist. Nach Definition von X_F hat w die Gestalt

$$w = [(s,U)]_x = \tilde{s}(x)$$

mit einer offenen Menge U von X, einem Schitt $s \in F(U)$ und einem Punkt $x \in U$. Nach (ii) ist

$$W := \tilde{s}(U)$$

eine offene Teilmenge von X. Wegen $\pi \circ \tilde{s} = 1_U$ (vgl. 5b.1.4) ist die Abbildung

$$\tilde{s}: U \longrightarrow W$$

injektiv und nach Wahl von W sogar bijektiv. Nach Definition der Topologie von X_F in 5b.1.4 ist $\tilde{s}$ eine stetige und nach (ii) eine offene Abbildung. Damit ist $\tilde{s}$ ein Homöomorphismus. Wegen $\pi \circ \tilde{s} = 1_U$ ist die Einschränkung

$$\pi|_W. W \longrightarrow U$$

von π gerade die Umkehrung von $\tilde{s}$ und damit ebenfalls ein Homöomorphismus.

<u>Zu (iv)</u>. Zum Beweis der Behauptung können wir $\pi: X_F \longrightarrow X$ durch die Einschränkung

$$U_{F|_U} = \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

und den Schnitt $s \in \Gamma_\pi(U)$ durch die Einschränkung auf eine beliebig kleine offene Umgebung des Punktes x ersetzen. Sei

$$w := s(x).$$

Nach (iii) gibt es eine offene Umgebung W von w für welche die Einschränkung

$$\pi|_W. W \longrightarrow U$$

(nach einer geeigneten Verkleinerung von U) ein Homöomorphismus ist. Bei Bedarf können wir dabei W und U weiter verkleinern. Nach (ii) können wir annehmen, W hat die Gestalt

$$W := \tilde{t}(U)$$

mit einem Schnitt $t \in F(U)$. Der Schnitt

$$\tilde{t}: U \longrightarrow W$$

von π ist dann gerade die Umkehrung von $\pi|_W$. Weil s nach Voraussetzung ein Schnitt von π ist, gilt

$$\pi \circ s|_U = 1_U .$$

Wegen $s(x) = w \in W$ und weil s stetig ist, können wir dabei eine offene Umgebung U' von $x = \pi(w)$ so klein wählen, daß

$$s(U') \subseteq W$$

gilt. Mit $\pi|_W$ ist dann auch die Einschränkung von π auf $s(U')$ bijektiv, also $s|_{U'}$ die Umkehrung von $\pi|_{s(U')}$. Für $y \in U'$ gilt damit

$$s(y) = (\pi|_W)^{-1}(y) = \tilde{t}(y),$$

d.h. es ist

$$s|_{U'} = \tilde{t}|_{U'} = (t|_{U'})^{\sim}$$

wie behauptet.

QED.

5b.1.6 Die assoziierte Garbe zu einer Prägarbe

Seien X ein topologischer Raum, $\mathcal{C}$ eine Kategorie wie in Bemerkung 5b.1.3(i),

$$F: Top(X) \longrightarrow \mathcal{C}$$

eine Prägarbe mit Werten in $\mathcal{C}$ und

$$\pi: X_F \longrightarrow X$$

die Projektion des Etal-Raums von F auf X. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Die Garbe

$$\tilde{F} := \Gamma_\pi$$

der stetigen Schnitte von π ist eine Garbe mit Werten in $\mathcal{C}$. Nach Definition von Γ_π sind die Abbildungen der Gestalt $\tilde{s}$ Schnitte von Γ_π. Für jede offene Menge U von X erhalten wir so eine wohlefinierte Abbildung

$$\alpha_{F,U}: F(U) \longrightarrow \Gamma_\pi(U),\ s \mapsto \tilde{s},$$

welche ein Morphismus der Kategorie $\mathcal{C}$ ist. Durchläuft U die offenen Mengen von X, so erhalten wir einen funktoriellen Morphismus

$$\alpha_F: F \longrightarrow \tilde{F} := \Gamma_\pi ,$$

d.h. einen Morphismus von Prägarben (mit Werten in einer Garbe). Die Garbe $\tilde{F}$ heißt <u>assoziierte Garbe</u> zur Prägarbe F. Dieser Morphismus ist funktoriell, d.h. für jeden Morphismus von Prägarben, sagen wir

$$\varphi: F' \longrightarrow F''$$

ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{\varphi} & F'' \\ \alpha_{F'}\downarrow & & \downarrow\alpha_{F''} \\ \tilde{F}' & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{F}'' \end{array}$$

Dabei sei für jeden Schnitt s: $U \longrightarrow X_{F'}$ und jeden Punkt $x \in U$

$$\tilde{\varphi}_U(s)(x) := \varphi_x(s(x)).$$

Dabei sei $\varphi_x: F'_x \longrightarrow F''_x$ die durch φ induzierte Abbildung der Halme. Wegen $s(x) \in F_x$ ist damit $\tilde{\varphi}_U(s): U \longrightarrow X_{F''}$ eine wohldefinierte Abbildung. Diese Abbildung ist stetig.

Wir erhalten so einen Funktor

$$P_{X,\mathcal{C}} \longrightarrow Sh_{X,\mathcal{C}},\ F \mapsto \tilde{F}.$$

(ii) Für jeden Punkt $x \in X$ ist der durch $\alpha_F: F \longrightarrow \tilde{F}$ induzierte Morphismus

$$(\alpha_F)_x: F_x \longrightarrow \tilde{F}_x$$

der Halme ein Isomorphismus.

(iii) Der funktorielle Morphismus $\alpha_F: F \longrightarrow \tilde{F}$ ist ein Isomorphismus, falls F eine Garbe ist. Insbesondere ist jede Garbe mit Werten in $\mathcal{C}$ isomorph zu einer Garbe Γ_π von stetigen Schnitten einer stetigen Abbildung π von topologischen Räumen.

(iv) Jeder Garben-Morphismus $\beta: F \longrightarrow G$, dessen Ziel G eine Garbe mit Werten in $\mathcal{C}$ ist, faktorisiert sich eindeutig über α_F, d.h. es besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\beta} & G \\ \alpha_F\downarrow & \nearrow & \approx\atop{\beta} \\ \tilde{F} & & \end{array}$$

mit einem eindeutig bestimmten Garben-Morphismus $\overset{\approx}{\beta}$.

(v) Seien

$$i: \mathbf{Sh} := \mathbf{Sh}_{X,\chi} \longrightarrow \mathbf{P}_{X,\chi} =: \mathbf{P},\ F \mapsto F,$$

der Vergiß-Funktor, der die Garben-Kategorie zu einer vollen Teilkategorie der Prägarben-Kategorie macht und

$$sh:\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{Sh}\ , F \mapsto \widetilde{F},$$

der Funktor von (i), welcher jede Prägarbe in die assoziierte Garbe abbildet.
Aussage (iv) besagt dann, daß für jede Prägarbe F auf X mit Werten in X und jede Garbe G auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ die Abbildung

$$\xi:\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}}(sh(F), G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(F, i(G)),\ \widetilde{\widetilde{\beta}} \mapsto \widetilde{\widetilde{\beta}}\circ\alpha_F,$$

bijektiv ist. Diese Abbildung ist funktoriell in F und G, d.h. ein Isomorphimus von Funktoren

$$\mathbf{P}^{op} \times \mathbf{Sh} \longrightarrow \mathbf{Ens}.$$

In Analogie zum Begriff der adjungierten Abbildungen in der linearen Algebra sagt man in dieser Situation, daß Funktoren sh und i ein <u>adjungiertes Paar</u> bilden, genauer, sh ist <u>linksadjungiert</u> zu i und i ist <u>rechtsadjungiert</u> zu sh.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. $\widetilde{F} = \Gamma_\pi$ <u>ist eine Garbe mit Werten in</u> $\mathcal{C}$ <u>und</u> α_F <u>ist ein Morphismus von Garben mit Werten von</u> $\mathcal{C}$. Nach Bemerkung 5b.1.2 (iii) ist $\widetilde{F} = \Gamma_\pi$ eine Garbe von Mengen. Nach Wahl von $\mathcal{C}$ bilden die Abbildungen mit Werten in einem Objekt von $\mathcal{C}$ selbst wieder Objekte von $\mathcal{C}$. Sind zum Beispiel die Objekte von $\mathcal{C}$ additive abelsche Gruppen und $s', s'' \in \Gamma_\pi(U)$ zwei Schnitte über derselben Menge U, so liegen für jedes $x \in U$ die Werte $s'(x)$ und $s''(x)$ in derselben additiven abelschen Gruppe F_x und man kann

$$(s'+s'')(x) := s'(x) + s''(x)$$

setzen. Wir erhalten einen Schnitt $s'+s'' \in \Gamma_\pi(U)$ und $\Gamma_\pi(U)$ wird auf diese Weise zu einer additiven abelschen Gruppe. Im allgemeinen Fall sind die Schnitt-Mengen $\Gamma_\pi(U)$ Objekte von $\mathcal{C}$ und Γ_π ist eine Garbe mit Werten in $\mathcal{C}$.

Auf Grund der obigen Definitin der Summe $s'+s''$ gilt für beliebige Schnitte $s', s'' \in F(U)$ und Punkte $x \in U$

$$\begin{aligned}
(s'+s'')^{\sim}(x) &= [s'+s'']_x && \text{(nach Definition von } (s'+s'')^{\sim}\text{)}\\
&= [s']_x + [s'']_x && \text{(auf Grund der Gruppenstruktur von } F_x\text{)}\\
&= \widetilde{s}'(x) + \widetilde{s}''(x) && \text{(nach Definition von } \widetilde{s}' \text{ und } \widetilde{s}''\text{)}\\
&= (\widetilde{s}' + \widetilde{s}'')(x), && \text{(nach Definition von } \widetilde{s}' + \widetilde{s}''\text{)}
\end{aligned}$$

also

$$(s'+s'')^{\sim} = \widetilde{s}' + \widetilde{s}''.$$

Mit anderen Worten, die natürlichen Abbildung $\alpha_F: F \longrightarrow \widetilde{F} = \Gamma_\pi$ ist ein Morphismus von Prägarben abelscher Gruppen. Im allgemeinen Fall ist α_F ein Morphimus von Prägarben mit Werten in $\mathcal{C}$.
<u>Das Diagramm von</u> (x) <u>ist kommutativ</u>. Es reicht zu zeigen, für jede offene Teilmenge U von X ist das zugehörige Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F'(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & F''(U) \\ \alpha_{F',U}\downarrow & & \downarrow\alpha_{F'',U} \\ \widetilde{F}'(U) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_U} & \widetilde{F}''(U) \end{array}$$

kommutativ (und die untere horizontale Abbildung wohldefiniert).
Seien $s \in F'(U)$ ein Schnitt und $x \in U$ ein Punkt. Dann ist $\varphi_U(s) \in F''(U)$ und

$\alpha_{F'',U}(\varphi_U(s)) \in \widetilde{F}''(U)$. Insbesondere ist

$$\alpha_{F'',U}(\varphi_U(s)) \colon U \longrightarrow X_{F''}$$

eine stetige Abbildung. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_{F'',U}(\varphi_U(s))(x) &= (\varphi_U(s))^{\sim}(x) && \text{(nach Definition von } \alpha_{F''}\text{)} \\
&= [\varphi_U(s)]_x && \text{(nach Definition von } (?)^{\sim}\text{)} \\
&= [(\varphi_U(s),U)]_x && \text{(denn } \varphi_U(s) \text{ ist ein Schnitt von F'' über U)} \\
&= \varphi_x([(s,U)]_x) && \text{(nach Definition von } \varphi_x\text{)} \\
&= \varphi_x(\widetilde{s}\,(x)) && \text{(nach Definition von } \widetilde{s}\text{)} \\
&= \widetilde{\varphi}_U(\widetilde{s})(x) && \text{(nach Definition von } \widetilde{\varphi}\text{)} \\
&= \widetilde{\varphi}_U(\alpha_{F',U}(s))(x) && \text{(nach Definition von } \alpha_{F'}\text{)}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist das Diagramm kommutativ, falls die untere horizontale Abbildung wohldefiniert ist.
Zumindest können wir sagen, die Einschränkung der unteren horizontalen Abbildung auf die Schnitte der Gestalt $\widetilde{s}$ von $\widetilde{F}'$ ist wohldefiniert. Nun sind aber alle Schnitte der Garbe $\widetilde{F}'$ lokal von der Gestalt $\widetilde{s}$, d.h. für jeden Schnitt $s \in \widetilde{F}'(U)$ gibt es eine offene Überdeckung

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

derart, daß das Bild von $s|_{U_i}$ für jedes $i \in I$ wohldefiniert ist. Je zwei der Schnitte $s|_{U_i}$ sind verträglich im Sinne des zweiten Garben-Axioms,

$$s|_{U_i}|_{U_i \cap U_j} = s|_{U_j}|_{U_i \cap U_j}.$$

Für jedes $x \in U_i \cap U_j$ gilt also

$$\varphi_x(s|_{U_i}|_{U_i \cap U_j}(x)) = \varphi_x(\, s|_{U_j}|_{U_i \cap U_j}(x)),$$

also

$$\widetilde{\varphi}_{U_i \cap U_j}(s|_{U_i})|_{U_i \cap U_j}) = \widetilde{\varphi}_{U_i \cap U_j}(s|_{U_j})|_{U_i \cap U_j}),$$

also

$$\tilde{\varphi}_{U_i}(s|_{U_i})|_{U_i \cap U_j} = \tilde{\varphi}_{U_j}(s|_{U_j})|_{U_i \cap U_j}.$$

Weil $\tilde{F}''$ eine Garbe ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Schnitt $\tilde{\varphi}_U(s) \in \tilde{F}''(U)$ mit

$$\tilde{\varphi}_U(s)|_{U_i} = \tilde{\varphi}_{U_i}(s|_{U_i}) \text{ für jedes } i \in I.$$

Man kann leicht zeigen, daß $\tilde{\varphi}_U(s)$ nicht von der speziellen Wahl der Überdeckung abhängt (zu je zwei Überdeckungen betrachte man eine gemeinsame Verfeinerung).

Zu (ii). Wir haben zu zeigen, die durch $\alpha_F: F \longrightarrow \tilde{F}$ induzierte Abbildung

$$(\alpha_F)_x: F_x \longrightarrow \tilde{F}_x$$

ist bijektiv. Für jede offene Umgebung U von x und jeden Schnitt $s \in F(U)$ gilt

$$(\alpha_F)_x([(s,U)]_x) = [(\alpha_{F,U}(s), U)]_x = [(\tilde{s},U)]_x$$

(vgl. Bemerkung 5b.1.3(iii)).

Beweis der Injektivität. Seien $[s']_x$ und $[s'']_x$ zwei Keime mit demselben Bild bei der Abbildung $(\alpha_F)_x$. Wir bezeichnen mit U' und U'' die offenen Umgebungen von x mit

$$s' \in F(U') \text{ und } s'' \in F(U'').$$

Indem wir s' und s'' auf eine offene Umgebung U von x einschränken, welche sowohl in U' als auch in U'' liegt, erreichen wir

$$U' = U'' = U.$$

Wegen

$$(\alpha_F)_x([s']_x) = (\alpha_F)_x([s'']_x),$$

d.h.

$$[(\tilde{s}',U)]_x = [(\tilde{s}'',U)]_x$$

gibt es ein offene Umgebung von x, auf welcher $\tilde{s}'$ und $\tilde{s}''$ übereinstimmen. Indem wir U geeignet verkleinern, erreichen wir

$$\tilde{s}'(y) = \tilde{s}''(y) \text{ für jedes } y \in U,$$

d.h.

$$[s']_y = [s'']_y \text{ für jedes } y \in U.$$

Insbesondere gilt, weil x in U liegt, $[s']_x = [s'']_x$. Wir haben gezeigt, $(\alpha_F)_x$ ist injektiv.

Beweis der Surjektivität von $(\alpha_F)_x: F_x \longrightarrow \tilde{F}_x$. Sei σ ein vorgegebenes Element des Halms $\tilde{F}_x$ und s ein Repräsentant von σ, d.h. s ist eine stetige Abbildung $s: U \longrightarrow X_F$ mit einer offenen Umgebung U von x,

$$\pi \circ s = 1_U \text{ und } \sigma = [(s,U)]_x.$$

Nach 5b.1.5 (iv) können wir die Umgebung U von x so klein wählen, daß s die Gestalt

$$s = \tilde{t}$$

hat mit $t \in F(U)$. Dann gilt aber

$$
\begin{aligned}
(\alpha_F)_x([t]_x) &= [\alpha_{F,U}(t)]_x && \text{(nach Definition von } (\alpha_F)_x)\\
&= [\tilde t\,]_x && \text{(nach Definition von } \alpha_{F,U})\\
&= [s]_x && \text{(nach Wahl von t)}\\
&= \sigma && \text{(nach Wahl von s).}
\end{aligned}
$$

Wir haben gezeigt, das vorgegebene Element σ von $\tilde F_x$ liegt im Bild von $(\alpha_F)_x$, d.h. $(\alpha_F)_x$ ist surjektiv.

Zu (iii). Sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Wir haben zu zeigen, die Abbildung

$$\alpha_{F,U}: F(U) \longrightarrow \tilde F(U) = \Gamma_\pi(U),\ s \mapsto \tilde s,$$

ist bijektiv.

Beweis der Injektivität. Seien s',s" $\in$ F(U) zwei Schnitte mit demselben Bild. Für jeden Punkt $x \in U$ gilt dann

$$[s']_x = \tilde s'(x) = \tilde s''(x) = [s'']_x ,$$

d.h. s' und s" haben in x denselben Keim. Es gibt also eine offene Menge U_x von X mit

$$x \in U_x \subseteq U \text{ und } s'|_{U_x} = s''|_{U_x} .$$

Da die Mengen U_x mit $x \in U$ eine Überdeckung der Menge U bilden und F eine Garbe ist, folgt s' = s" (nach dem ersten Garben-Axiom). Wir haben gezeigt, $\alpha_{F,U}$ ist injektiv.

Beweis der Surjektivität. Sei $s: U \longrightarrow X_F$ ein stetiger Schnitt von $\Gamma_\pi = \tilde F$ über U. Nach 5b.1.5 (iv) gibt es dann eine offene Überdeckung von U, sagen wir

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i ,$$

und für jedes $i \in I$ einen Schnitt

$$t_i \in F(U_i) \text{ mit } s|_{U_i} = \tilde t_i .$$

Für je zwei $i,j \in I$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\alpha_{F,U_i\cap U_j}(t_i|_{U_i\cap U_j}) &= \alpha_{F,U_i}(t_i)|_{U_i\cap U_j} && (\alpha_F \text{ ist ein Prägarben-Morphismus})\\
&= \tilde t_i|_{U_i\cap U_j} && \text{(nach Definition von } \alpha_F)\\
&= s|_{U_i}|_{U_i\cap U_j} && \text{(nach Wahl der } t_i)\\
&= s|_{U_i\cap U_j}
\end{aligned}
$$

Der letzte Ausdruck ist symmetrisch in i und j. Beim Vertauschen von i und j bleiben also alle Ausdrücke der Rechnung unverändert. Insbesonere gilt

$$\alpha_{F,U_i\cap U_j}(t_i|_{U_i\cap U_j}) = \alpha_{F,U_i\cap U_j}(t_j|_{U_i\cap U_j}).$$

Wie wir gerade gezeigt haben, sind die Abbildungen $\alpha_{F,U_i\cap U_j}$ injektiv. Es gilt somit

$$t_i|_{U_i\cap U_j} = t_j|_{U_i\cap U_j}.$$

Die Schnitte $t_i \in F(U_i)$ sind also im Sinne des zweiten Garben-Axioms paarweise verträglich. Es gibt damit einen Schnitt $t \in F(U)$ mit $t|_{U_i} = t_i$ für jedes i.

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_{F,U}(t)|_{U_i} &= \alpha_{F,U_i}(t|_{U_i}) && (\alpha_F \text{ ist ein Prägarben-Morphismus})\\
&= \alpha_{F,U_i}(t_i) && (\text{nach Wahl von } t)\\
&= \tilde{t}_i && (\text{nach Definition von } \alpha_F\\
&= s|_{U_i} && (\text{nach Wahl der } t_i)
\end{aligned}$$

Weil die U_i die Menge U überdecken und $\tilde{F}$ eine Garbe ist, folgt

$$\alpha_{F,U}(t) = s$$

(nach dem ersten Garben-Axiom). Damit ist die Surjektivität von $\alpha_{F,U}$ bewiesen.

<u>Zu (iv)</u>. <u>Beweis der Eindeutigkeit von</u> $\approx\beta$.

Wir nehmen an, es gibt einen Garben-Morphismus $\approx\beta$, für welchen das angegebene Diagramm kommutativ ist. Aus diesem kommutativen Diagramm erhalten wir durch Übergang zu den Halmen in $x \in X$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
F_x \arrow[r, "\beta_x"] \arrow[d, "(\alpha_F)_x"'] & G_x \\
\tilde{F}_x \arrow[ur, "\approx\beta_x"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach (ii) sind die Abbildungen $(\alpha_F)_x$ Isomorphismen. Wir können deshalb

$$\approx\beta_x = \beta_x \circ (\alpha_F)_x^{-1}$$

schreiben. Insbesondere ist $\approx\beta_x$ für jedes x durch β eindeutig festgelegt. Sind

$$\approx\beta', \approx\beta'': \tilde{F} \longrightarrow G$$

zwei Garben-Morphismen, für welche das Diagramm von (iv) kommutativ wird (mit $\approx\beta'$ bzw. $\approx\beta''$ anstelle von $\approx\beta$), so gilt für jedes $x \in X$

$$\approx\beta'_x = \approx\beta''_x ,$$

also

$$\beta'_x([(s,U)]_x) = \beta''_x([(s,U)]_x)$$

für jede offene Umgebung U von x und jeden Schnitt $s \in \tilde{F}(U)$, also

$$[\tilde{\tilde{\beta}}'_U(s)]_x) = [\tilde{\tilde{\beta}}''_U(s)]_x).$$

Es gibt deshalb eine offene Umgebung U_x von x (die ganz in U liegt) mit

$$\tilde{\tilde{\beta}}'_U(s)|_{U_x} = \tilde{\tilde{\beta}}''_U(s)|_{U_x} \quad (\in G(U_x))$$

Weil G eine Garbe ist und die U_x eine offene Überdeckung von U bilden, folgt

$$\tilde{\tilde{\beta}}'_U(s) = \tilde{\tilde{\beta}}''_U(s)|(\in G(U))$$

Da dies für jede offene Umgebung U eines Punktes von $x \in X$ gilt, d.h. für jede offene Menge U von X (und jeden Schnitt $s \in \tilde{F}(U)$), so müssen die beiden Garben-Morphismen gleich sein,

$$\tilde{\tilde{\beta}}' = \tilde{\tilde{\beta}}''.$$

Der Morphismus $\tilde{\tilde{\beta}}$ ist damit durch die Kommutativität des Diagramms von (iv) eindeutig festgelegt.

<u>Beweis der Eindeutigkeit von</u> $\tilde{\tilde{\beta}}$. Sei $\beta: F \longrightarrow G$ ein Prägarben-Morphismus, dessen Ziel G eine Garbe ist. Wir betrachten das nach (i) zu β gehörige kommutative Diagramm von Prägarben-Morphismen

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\beta} & G \\ \alpha_F\downarrow & & \downarrow\alpha_G \\ \tilde{F} & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \tilde{G} \end{array}$$

Weil G eine Garbe ist, ist α_G nach (iii) ein Isomorphismus. Wir setzen

$$\tilde{\tilde{\beta}} := \alpha_G^{-1} \circ \tilde{\beta}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\beta}} \circ \alpha_F &= \alpha_G^{-1} \circ \tilde{\beta} \circ \alpha_F && \text{(nach Definition von } \tilde{\tilde{\beta}}) \\ &= \alpha_G^{-1} \circ \alpha_G \circ \beta && \text{(wegen des kommutativen Vierecks)} \\ &= \beta. \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{\tilde{\beta}}$ der gesuchte Garben-Morphismus, für welchen das Dreieck von (iv) kommutativ ist.

<u>Zu (v)</u>. Wir haben zu zeigen, die angegebene Bijektion der Hom-Mengen hängt funktoriell von F und G ab. Seien

$$u: F' \longrightarrow F$$

ein Morphismus von Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$ und

$$v\colon G \longrightarrow G'$$

ein Morphismus von Garben auf X mit Werten in $\mathcal{C}$. Dazu betrachten wir einen Garben-Morphismus

$$\tilde{\tilde{\beta}}\colon \tilde{F} = \mathrm{sh}(F) \longrightarrow G.$$

Wir können auf diesen Morphismus zunächst den Funktor

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{sh}(u),\ v)\colon \mathrm{Hom}(\mathrm{sh}(F),G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{sh}(F'),G')$$

anwenden (und erhalten $v\circ\tilde{\tilde{\beta}}\circ\tilde{u}\colon \tilde{F}' \longrightarrow \tilde{F} \longrightarrow G \longrightarrow G'$) und anschließend den Funktor ξ (und erhalten $v\circ\tilde{\tilde{\beta}}\circ\tilde{u}\circ\alpha_{F'}$: $F' \longrightarrow \tilde{F}' \longrightarrow \tilde{F} \longrightarrow G \longrightarrow G'$). Wir können diese beiden Funktoren aber auch in umgekehrter Reihenfolge anwenden, d.h. wir wenden zunächst ξ an (und erhalten $\tilde{\tilde{\beta}}\circ\alpha_F\colon F \longrightarrow \tilde{F} \longrightarrow G$) und anschließend den Funktor Hom(u, i(v)) (und erhalben $v\circ\tilde{\tilde{\beta}}\circ\alpha_F\circ u\colon F' \longrightarrow F \longrightarrow \tilde{F} \longrightarrow G \longrightarrow G'$). Zu zeigen ist, daß wir in beiden Fällen denselben Morphismus erhalten, d.h. daß

$$v\circ\tilde{\tilde{\beta}}\circ\tilde{u}\circ\alpha_{F'} = v\circ\tilde{\tilde{\beta}}\circ\alpha_F\circ u$$

gilt.
Zum Beweis betrachten wir das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
F' \arrow[rr, "\beta'"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dd, "\alpha_{F'}"'] & & G' \\
& F \arrow[r, "\beta"] \arrow[dd, "\alpha_F"'] & G \arrow[u, "v"'] \\
\tilde{F}' \arrow[dr, "\tilde{u}"'] & & \\
& \tilde{F} \arrow[uur, "\tilde{\tilde{\beta}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei sei β durch die Forderung der Kommutativität des Dreiecks unten rechts definiert, d.h.

$$\beta = \tilde{\tilde{\beta}}\circ\alpha_F,$$

und β' durch die des Parallelogramms oben rechts definiert, d.h.

$$\beta' := v\circ\beta\circ u.$$

Das Viereck unten links ist kommutativ, weil der Übergang zur assoziierten Garbe funktoriell ist.

Die zu beweisende Identität bekommt mit den eingeführten Bezeichnungen die Gestalt

$$v\circ\tilde{\tilde{\beta}}\circ\tilde{u}\circ\alpha_{F'} = \beta'$$

Für die linke Seite erhalten wir

$$\begin{aligned}
v\circ\tilde{\tilde{\beta}}\circ\tilde{u}\circ\alpha_{F'} &= v\circ\tilde{\tilde{\beta}}\circ\alpha_F\circ u && \text{(das linke untere Viereck ist kommuativ)}\\
&= v\circ\beta\circ u && \text{(nach Definition von } \beta\text{)}\\
&= \beta' && \text{(nach Definition von } \beta'\text{)}
\end{aligned}$$

Die Identität besteht also tatsächlich.
QED.

Index